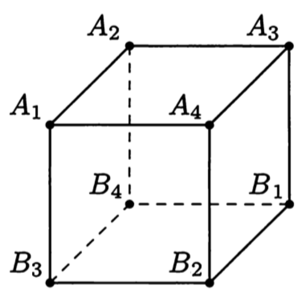
Isométries du cube + Colorations

Thèorème : Le groupe des isométries positives du cube est

$$\mathrm{Is}^+(C^6) \simeq \mathcal{S}_4.$$

Application : Si l'on se donne n couleurs il y a, à isométrie positive près, $\dfrac{1}{24}(n^6 + 8n^2 + 6n^3 + 3n^4 + 6n^3)$, coloriages du cube.

Preuve du théorème : On suppose notre cube centré en 0. Dans toute la preuve on se réfèrera au dessin suivant pour les notations :



On note alors D_i la diagonale A_iB_i et on s'intéresse à l'action

$$\mathrm{Is}^+(C^6) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. On a alors un morphisme

$$\varphi : \mathrm{Is}^+(C^6) \to \mathcal{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathcal{S}_4.$$

<u>Montrons que φ est injectif :</u>

Soit g tel que $\varphi(g) = \mathrm{Id}$. Pour tout i, la diagonale D_i est alors fixée et en particulier il vient que g permute A_i et B_i (ce sont des points extrémaux donc c'est le seul moyen pour que les distances soient conservées). Supposons que A_1 et B_1 ne soient pas échangés. Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$ (au sens des distances) il vient nécessairement que A_2 et B_2 ne sont pas échangés. Il en est alors de même pour les autres sommets. On vient en fait de montrer que si deux sommets opposés sont invariants par g, ils sont tous fixés par g. Les sommets formant un repère affine, il vient que g est l'identité.

Si, en revanche, les sommets opposés sont permutés, on note s_0 la symétrie centrale du cube. Mais alors s_0g envoie les A_i sur A_i donc $s_0g = \mathrm{Id}$ par ce qui précède. C'est impossible car s_0g n'est pas une isométrie positive (produit d'une positive avec s_0 qui envoie une base directe sur une base indirecte). On vient alors de montrer l'injectivité !

Montrons que φ est surjective :

Comme les transpositions engendrent $\mathcal{S}_4$, il suffit de voir qu'elles sont toutes dans l'image de φ. Prenons D_i et D_j deux diagonales. On note P le plan passant par ces deux diagonales. On peut alors considérer la rotation d'angle π et d'axe passant par P et l'origine. C'est alors une isométrie positive qui envoie D_i sur D_j et qui laisse invariant les deux autres diagonales. L'image de cette rotation est alors un transposition. On a alors le résultat voulu.

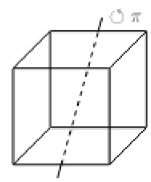
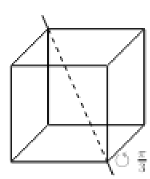
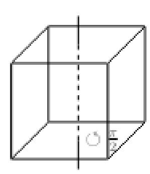
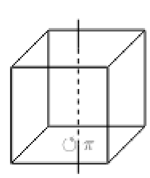
Preuve de l'application : Soit C un ensemble de n couleurs. On note alors F l'ensemble des faces du cube et $\mathcal{F}(F, C)$ l'ensemble des coloriages possibles du cube. On décide de s'intéresser à l'action de groupe naturelle

$$\begin{aligned} \mathrm{Is}^+(C^6) \times \mathcal{F}(F, C) &\to \mathcal{F}(F, C) \\ (g, f) &\mapsto (x \mapsto f(g^{-1}x)) \end{aligned}$$

Il vient alors que le nombre que l'on recherche est le nombre d'orbites différentes de cette action, que l'on note ici k. Avec la formule de Burnside on a alors

$$k = \frac{1}{|\mathrm{Is}^+(C^6)|} \sum_{g \in \mathrm{Is}^+(C^6)} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Pour calculer la taille des fixateurs, il est nécessaire de faire des dessins et un beau tableau. Je me permets donc de reprendre le tableau de Geoffrey Deperle qui se trouve dans son document sur le même développement. Il y a cependant une petite erreur (du moins, je crois) dans la première colonne. Les faces latérales sont échangées pour une permutation, elles doivent donc avoir la même couleur. Il y a alors n^3 possibilités, et non n^4. C'est le tableau suivant :

Transpositions (6 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle π d'axe la droite passant par le milieu des arêtes reliant les diagonales.		Il suffit de choisir une couleur pour chaque face latéral, une couleur pour la face de devant et la face de dessous et une couleur pour la face du dessus et la face opposée. Il y a n^4 possibilités.
3-cycle (8 éléments) : Il s'agit d'une rotation autour de la diagonale D_i qui n'intervient pas dans		Il faut et il suffit que les trois faces qui s'intersectent soient de la même couleur. Il y a n^2 possibilités.
4-cycle (6 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe passant par le centre de deux faces opposées.		Il faut et il suffit choisir une couleur pour la face du haut, une couleur sur la face du bas et une couleur pour les faces latérales. Il y a n^3 possibilités.
Double transpositions (3 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle π autour de l'axe passant par le centre de deux faces opposées.		Il faut et il suffit choisir une couleur pour la face du haut, la face du bas et une couleur pour la face lateral avant et la face latéral arrière, et une couleur pour les faces latérales des côtes. Il y a n^4 possibilités.

On retrouve alors le résultat voulu.